Herleitung des Impuls- u. Energieerhaltungssatzes aus dem Newtonschen Axiom und der Translationsinvarianz der Raumzeit

1.) Prinzip der Variationsrechnung

Man definiert eine *Lagrangefunktion* $\mathscr{L}$ *(benannt nach J. L. Lagrange, 1736-1813, franz.-italienischer Mathematiker und Astronom)*, welche von einer gewöhnlichen, stetig differenzierbaren reellen Funktion y(x), $[x1 \in \Re, x2 \in \Re] \rightarrow \Re$, und dessen 1. Ableitung, y'(x), abhängt:

$$\mathscr{L} = f\left(y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right)$$

Bsp. für mögliche Lagrangefunktionen:

$$\mathscr{L} = y\,;\ \mathscr{L} = y'^2 + \cos(y)$$

Aufbauend auf die Lagrangefunktion wird ein sogenanntes Wirkungsfunktional W definiert:

$$W = \int_{x1}^{x2} \mathscr{L}\, dx$$

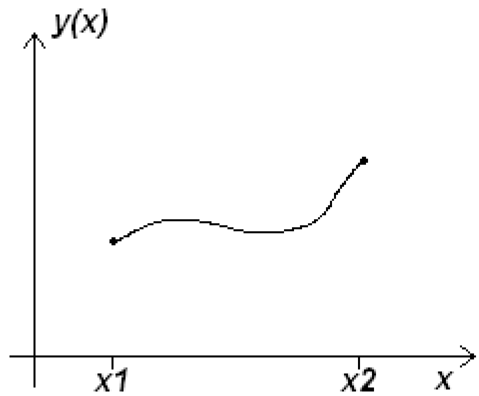

Abb.1 – Bsp. für eine von vielen mögl. Fkt. y(x)

W ist eine reelle Zahl. Jeder beliebigen Funktion y(x) in $\mathscr{L}$ kann so eine Zahl zugeordnet werden.

Ein wesentliches Resultat der Variationsrechnung ist nun der folgende Satz:

$$\delta W = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y'} \right) = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y}$$

Die rechts stehende Gleichung wird *Lagrange-Gleichung* genannt. Der Satz besagt, dass sich bei geringfügiger Änderung = Variation der einzusetzenden Funktion y(x) die Wirkung genau dann nicht ändert (→ δW=0, δW...Änderung der Wirkung), wenn eine bestimmte Relation zwischen den Ableitungen der Lagrangefunktion nach y(x) und y'(x) erfüllt ist, dh., wenn die Lagrange-Gleichung gilt. Die Funktion y(x) kann, von den Endpunkten y(x1) und y(x2), welche fix vorgegeben werden, abgesehen, dabei beliebig nach oben oder unten variiert werden. (→ Abb.2) *Die Funktion y bzw. deren Ableitung y' sind hier als unabhängige Variable anzusehen. Was zunächst etwas überraschend aussieht, ist mathematisch völlig problemlos möglich, sofern alle Terme und Ableitungen wohldefiniert und konsistent zueinander sind. Das Zeichen δ in $\delta/\delta y$ zeigt an, dass es sich um eine partielle Ableitung handelt. Eine partielle Ableitung ist die Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion (also einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen) nach nur einer Unabhängigen; alle anderen Unabhängigen werden bei der Ableitung als konstant angesehen.*

Da die Bedingung δW=0 eine sehr weitreichende Einschränkung darstellt, gibt es dafür bei gegebener Lagrangefunktion und bestimmten gegebenen Werten y(x1) und y(x2) im Normalfall meist nur eine Lösung y(x), somit auch nur ein y(x), das unter den gewählten Vorgaben die Lagrange-Gleichung erfüllt!

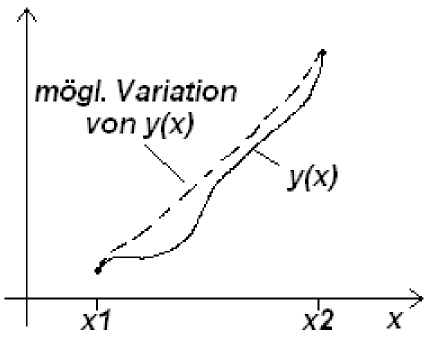

Abb. 2 – Variation

Der obengenannte Satz lässt sich folgendermaßen beweisen:

$$y(x,\varepsilon)=u(x)+\varepsilon\cdot v(x)\rightarrow\mathscr{L}=f\left(u(x)+\varepsilon\cdot v(x),u'(x)+\varepsilon\cdot v'(x)\right),\;W=f(\varepsilon)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird eine beliebige Test-Funktion u(x) ausgewählt, welche nun variiert werden soll. Dazu wird eine mit einer kleinen, von 0 verschiedenen Zahl ε skalierte Funktion v(x) hinzugezählt. Das Ergebnis ist die in $\mathscr{L}$ enthaltene Funktion y(x, ε), welche nun auch vom Parameter ε abhängt. W lässt sich dann über den Parameter ε variieren und die Änderung δW, ausgehend von der Funktion u(x), untersuchen. Dabei ist im Hinterkopf zu behalten, dass v(x) im Intervall]x1,x2[völlig frei wählbar ist. *(An den Intervallgrenzen x1 und x2 muss jedoch v(x1) = v(x2) = 0 gelten, da ja y(x1) = y(x2) = const.)* Dadurch ist es möglich, implizit mittels Änderung des Parameters ε alle möglichen Variationen gleichzeitig durchzuführen.

Gefordert ist, dass in jedem Fall δW = 0 gelten muss:

$$\delta W=0\rightarrow\frac{dW}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon=0\rightarrow\frac{dW}{d\varepsilon}=0$$

δW lässt sich näherungsweise durch Multiplikation der Ableitung von W nach ε mit der gewählten Änderung von ε, Δε, berechnen. Δε muss zwar klein sein, damit die Näherung gültig ist, aber ungleich 0, woraus folgt, dass dW/dε = 0.

Die Definition für das Wirkungsfunktional eingesetzt ergibt

$$\frac{dW}{d\varepsilon}=\int_{x1}^{x2}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varepsilon}dx=\int_{x1}^{x2}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta\varepsilon}+\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta y'}\frac{\delta y'}{\delta\varepsilon}dx$$

In letzterem Schritt wurde die Kettenregel angewandt. *(Ableitungen nach den in $\mathscr{L}$ enthaltenen Funktionen, multipliziert mit deren ε-Ableitung, zusammengezählt, ergibt die Gesamt-Ableitung von $\mathscr{L}$ nach ε)*

$$= \int_{x1}^{x2} \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y} v(x) + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y'} v'(x) dx = \int_{x1}^{x2} \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y} v(x)\, dx + \underbrace{\left. \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y'} v(x) \right|_{x1}^{x2}}_{=0,\ \text{da}\ v(x1)=v(x2)=0} - \int_{x1}^{x2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y'}\right) v(x)\, dx =$$

$$= \int_{x1}^{x2} \left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y'}\right)\right) \cdot v(x)\, dx = 0 \ \rightarrow \ \left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y'}\right)\right) = 0 \ \text{ bzw. } \ \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y'}\right).$$

Aus der Definition für y(x, ε) folgt δy/δε = v(x) (analog für v'(x)). Der Term mit v'(x) wird partiell integriert, der Nicht-Integralterm fällt aufgrund der Bedingung v(x1) = v(x2) = 0 weg. Herausheben von v(x) lässt erkennen, dass bei beliebig wählbarer Funktion v(x) das Gesamtintegral nur dann gleich 0 sein kann, wenn der Term in $\mathscr{L}$ gleich 0 ist. Diese Bedingung ist aber nichts anderes als die Lagrange-Gleichung.

2.) Physikalische Anwendung

Das Prinzip der Variationsrechnung hat sich in der Physik als sehr nützlich erwiesen. Wird die Funktion y(x) als Teilchenbahnfunktion interpretiert,

$$y(x) = x(t)$$
$$y'(x) = v(t) = \dot{x}(t)$$

(x ... zurückgelegter Weg, t ... Zeit, v ... Geschwindigkeit; Ableitungen nach der Zeit werden meist mit einem Punkt statt einem Strich gekennzeichnet) so lässt sich durch die Bedingung δW=0 jeder Lagrangefunktion bei gegebenen Randbedingungen x(t1) und x(t2) genau eine Wegstreckenfunktion x(t) zuordnen.

Ergibt sich aus einer bestimmten Lagrangefunktion jedes Mal genau die Funktion x(t), gemäß der sich ein physikalisches Teilchen in Natura bewegt, so kann dieses $\mathscr{L}$ als Vorschrift bzw. Naturgesetz interpretiert werden, nach der sich das Verhalten des Teilchens berechnen und vorhersagen lässt.

Natürlich wird in der Physik nur selten wie im hier vorliegenden Fall mit eindimensionalen Funktionen gerechnet. Um das Verhalten mehrerer Teilchen in mehreren Dimensionen darstellen zu können, benötigt man mehrdimensionale Vektorfunktionen. In der Quantenphysik wird sogar mit Feldfunktionen des Typs $\vec{\varphi}(\vec{x},t)$ (jedem Raumzeitpunkt wird ein Feld-Vektor zugeordnet) gerechnet. Das zugrundeliegende Prinzip der Variationsrechnung ist im Wesentlichen jedoch immer das gleiche.

Es kommen in der Physik die folgenden 2 Fälle zur Anwendung:

Fall 1. Es ist möglich, ein bekanntes Naturgesetz in konsistenter Weise mit der Lagrange-Gleichung zu identifizieren. Dann kann aus dieser die zugehörige Lagrangefunktion ermittelt werden, mittels derer die Bewegungsfunktionen x(t) und andere physikalische Eigenschaften oft auf wesentlich einfachere Art und Weise berechenbar sind.

Fall 2. Das Naturgesetz ist noch nicht bekannt. Man weiß aber, dass bestimmte Symmetriebedingungen bzw. Invarianzen gelten müssen, die zB. in Experimenten nachgewiesen worden sind. Mögliche Symmetriebedingungen sind bspw. Drehinvarianz *(das physikalische System sieht genauso aus wie vorher, nachdem es gedreht worden* *ist)*, Zeitinvarianz *(das physikalische System lässt es nicht zu, festzustellen, ob die Zeit vor- oder rückwärts läuft)*, Teilchenununterscheidbarkeit, „Lorentzinvarianz“ *(Kompatibilität mit der speziellen Relativitätstheorie)*, positive Parität *(das System verändert sich nach Punktspiegelung nicht)* oder Kombinationen aus einzelnen Symmetrien *(zB. Systeminvarianz nach Umkehrung der elektrischen Ladung und anschließender Punktspiegelung)*.

Diese Symmetriebedingungen müssen auch für die Lagrangefunktion gelten, wenn diese das physikalische System richtig beschreiben soll. Dadurch wird die Anzahl an Lagrangefunktionen, die dafür in Frage kommen, empfindlich eingeschränkt. Die verbleibenden möglichen Lagrangefunktionen können dann durch Vergleich der zugehörigen Bewegungsfunktionen x(t) mit experimentellen Daten weiter ausgesiebt werden, um schlussendlich zum richtigen $\mathscr{L}$ zu gelangen, das dann als naturgesetzmäßige Vorschrift für das vorliegende System postuliert werden kann.

In der modernen Physik ist letztere Methode oftmals die einzige Möglichkeit, um gezielt zu neuen Gesetzmäßigkeiten zu gelangen. Für die Quantenfeldtheorie ist sie von fundamentaler Bedeutung.
Oft lassen sich, wenn die richtige Lagrangefunktion einmal bekannt ist, anhand der Lagrange-Gleichung weitere interessante Einsichten in die Physik des zu untersuchenden Systems gewinnen. In der Quantenfeldtheorie erhält man so die Feldgleichungen, wie z.B. die Dirac-Gleichung *(mit der Relativitätstheorie konforme Erweiterung der Schrödinger-Gleichung)*

3.) Herleitung der Lagrangefunktion zum Newton’schen Kraftgesetz

Als Bsp. für den im vorigen Abschnitt erwähnten Fall 1 soll das Newton’sche Kraftgesetz

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \,,$$

(F .. Kraft, m .. Masse, a .. Beschleunigung), mit der Lagrange-Gleichung identifiziert und daraus die Lagrangefunktion bestimmt werden.

Das Newton’sche Kraftgesetz, auch Aktionsprinzip oder 2. Newton’sches Axiom genannt, ist das fundamentale Grundgesetz in der klassischen Physik. Auf ihm basieren alle anderen Gesetzmäßigkeiten der klass. Mechanik, ebenso wie das 1. Newton’sche Axiom (die Geschwindigkeit eines Körpers, auf den keine Kraft einwirkt, bleibt konstant $\rightarrow$ F = m·a = 0 $\rightarrow$ m·v = const. $\rightarrow$ v = const., da m const.) und das 3. Newton’sche Axiom (jede Kraft bewirkt eine Gegenkraft; im Beweis wird durch Annahme des Gegenteils ein Widerspruch herbeigeführt; Beweisskizze: wenn zwei Körper nebeneinander liegen, der eine vom anderen angezogen wird, aber nicht vice versa, müssten, nachdem ein Körper den anderen nicht durchdringen kann, sowie aufgrund des Kraftgesetzes beide Körper beschleunigt werden, obwohl keine äußere Kraft anliegt $\rightarrow$ Widerspruch zum 1. Axiom).

Eine nicht unwesentliche Frage ist, wie die Kraft F eigentlich beschaffen ist. Im einfachsten Modell wird angenommen, die Stärke der Kraft auf ein Teilchen hängt nur vom Ort des Teilchens ab, nicht aber von der Zeit (oder der Geschwindigkeit etc.). Es gibt also ein statisches Kraftfeld F(x). Wodurch dieses Feld verursacht wird, ist unerheblich (es kann z.B. durch einen großen, ruhenden, mitunter weit entfernten Körper hervorgerufen werden wie im Falle der Gravitation). Wenn nun das Kraftfeld derart beschaffen ist, dass die Summe aller Kräfte entlang eines beliebigen geschlossenen Weges ($\oint \vec{F} \cdot \vec{dx}$) immer 0 ergibt, in anderen Worten, wenn die Kraftfeldlinien nicht in sich geschlossen sind, sondern aus dem Unendlichen oder einem singulären Punkt, an dem die Kraft nicht berechenbar ist, entweichen und dorthin münden, so handelt es sich um ein konservatives Kraftfeld. Konservative können immer durch ein skalares Potentialfeld Φ(x) beschrieben werden (also durch eine Funktion, die jedem Raumpunkt eine Zahl zuweist). Es gilt: F(x) = -dΦ(x)/dx. Dort, wo sich das

Potentialfeld also besonders stark ändert, ist die Kraft besonders stark. (Und die Richtung, in die sich das Potentialfeld am jeweiligen Ort am stärksten hin abschwächt, ist die Richtung der Kraft. Da im Folgenden aber nur in einer Dimension gerechnet, spielen Richtungen hier keine Rolle.)

Basierend auf der Bewegungsfunktion x(t) lautet die Lagrange-Gleichung folgendermaßen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}}\right)=\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x}$$

Die Kraft wird nun mit der x-Ableitung der Lagrangefunktion identifiziert und integriert,

$$F=-\frac{d\Phi}{dx}=\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x}\rightarrow\mathscr{L}=\int-\frac{d\Phi}{dx}dx=-\Phi+C(v)\,,$$

das Produkt aus Masse mal Beschleunigung wird dem linken Teil der Lagrangegleichung gleichgesetzt:

$$m\cdot\ddot{x}=\frac{d}{dt}(m\cdot\dot{x})=\frac{d}{dt}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}}=\frac{d}{dt}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta v}\rightarrow\mathscr{L}=\int m\cdot v\,dv=\frac{mv^2}{2}+C(x)\,.$$

Die Lagrangefunktion muss also einerseits gleich dem negativ gesetzten Potentailfeld plus einer nur von der Geschwindigkeit v abhängigen Funktion, andererseits gleich dem Term $mv^2/2$ plus einer nur vom Ort x abhängigen Funktion sein. Die Funktion $\mathscr{L}$ ist dadurch bis auf eine Konstante eindeutig definiert:

$$\rightarrow\mathscr{L}=\frac{mv^2}{2}-\Phi(x)\quad(+const)\,.$$

Diese Lagrangefunktion ist zum Newton’schen Kraftgesetz absolut gleichwertig. Mit deren Hilfe kann nun bei gegebenem Potentialfeld Φ(x) und geg. Ort des zu beschreibenden Teilchens zu Beginn (x(t1)) und am Ende (x(t2)) seiner Bahn die Bahnfunktion x(t) berechnet werden (Beispiel dazu siehe Ende dieses Abschnittes)

Die Probe, ob die gefundene Lagrangefunktion auch tatsächlich zum Newton’schen Kraftgesetz passt, erfolgt durch Berechnung der Wirkung,

$$W=\int_{t1}^{t2}\frac{mv^2}{2}-\Phi(x)\,dt=\int_{t1}^{t2}\frac{m}{2}\left(\dot{x}(t)^2\right)-\Phi(x(t))dt\,,$$

und Bildung deren Variation, welche wieder gleich 0 zu setzen ist:

$$\delta W=0=\int_{t1}^{t2}\frac{m}{2}\delta(\dot{x}(t))^2-\delta(\Phi(x(t)))dt=\int_{t1}^{t2}\frac{m}{2}\cdot2\dot{x}\cdot\delta\dot{x}-\dot{\Phi}\delta x\,dt=$$
$$=\int_{t1}^{t2}-m\ddot{x}\cdot\delta x\,dt+m\dot{x}\delta x\Big|_{t1}^{t2}+\int_{t1}^{t2}F\delta x\,dt=\int_{t1}^{t2}\underbrace{(F-m\ddot{x})}_{0}\cdot\delta x\,dt$$
$$\rightarrow F=m\ddot{x}$$

Dabei wurde in der ersten Zeile berücksichtigt, dass die Masse des Teilchens nicht variiert werden kann, und wieder die Kettenregel angewandt: die Variation einer Funktion einer Funktion δ(f(g(t))) ist - unabhängig davon, auf welche Weise die Variation konkret durchgeführt wird! – gleich der Ableitung der äußeren Funktion

mal der Variation der inneren Funktion, f'(g(t))·δg(t) (analog zur normalen Ableitung f'(g(t))·g'(t)). Im ersten Term ist die äußere Funktion f(g(t)) = g(t)^2, die innere Funktion g(t) = $\dot{x}$(t). Für den das Potentialfeld enthaltenden Term gilt f(g(t)) = Φ(g(t)), g(t)=x(t).
In der zweiten Zeile wurde der Geschwindigkeitsterm partiell integriert, um die zeitliche Ableitung im Variationsterm $\delta\dot{x}$ (t) loszuwerden. Der Nichtintegralterm fällt wieder wegen δx(t1) = δx(t2) = 0 weg (an den Intervallgrenzen darf nicht variiert werden), δx wird herausgehoben, und da die Variation ungleich 0 ist, muss $F - m\ddot{x} = 0$ gelten.

<u>Beispiel:</u>

Ein Kugelschreiber mit der Masse m wird zum Zeitpunkt t = 0s in Mürzzuschlag aus einem Meter Höhe losgelassen, und soll zum Zeitpunkt t = 1s den Boden erreichen. Die Gravitationskonstante g beträgt in Mürzzuschlag 9,80665 ms^{-2}[*]. Das Potentialfeld ist näherungsweise Φ(x) = mgx. Die Lagrangefunktion lautet somit $\mathscr{L}$ = $mv^2/2$ – mgx.
Gegeben sind also $\mathscr{L}$ sowie die Randwerte x(t1=0) = 1, x(t2=1) = 0, gesucht ist die Bewegungsfunktion x(t). Nullsetzen der Variation des Wirkungsintegrals ergibt

$$\partial W = \delta\int_{t1=0}^{t2=1} \frac{mv^2}{2} - mgx\,dt = \int_0^1 \frac{m}{2} 2v\delta v - mg\delta x\,dt = -\int_0^1 ma\delta x\,dt + mv\delta x\Big|_0^1 - \int_0^1 mg\delta x\,dt$$

$$= \int_0^1 (-ma - mg)\delta x\,dt = 0 \rightarrow -ma - mg = 0 \rightarrow a(t) = -g \rightarrow v(t) = \int -g\,dt = -g\cdot t + v_0$$

$$\rightarrow x(t) = \int -gt + v_0\,dt = -gt^2 + v_0 t + x_0$$

Die Umformungen wurden analog zur Rechnung auf der vorhergehenden Seite vorgenommen, anschließend wurde aus der Beschleunigung durch zweimalige Integration die Wegstreckenfunktion x(t) berechnet. Die Integrationskonstanten v_0 und x_0 entsprechen der Geschwindigkeit bzw. dem Ort zum Zeitpunkt t = 0, wie durch Einsetzen gezeigt werden kann. Aus den Randwerten folgt x(1) = –g + v_0 + x_0 = 0 → v_0 = g – x_0; x_0 = 1 → x(t) = $-gt^2$ + (g–1)t + 1. Der Kugelschreiber muss also beim Loslassen die Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 8,80665 m/s ~ 32 km/h (nach oben gerichtet) besitzen, um nach nur einer Sekunde wieder am Boden anzukommen! Dieses Ergebnis kann leicht experimentell verifiziert werden.

4.) Herleitung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes

Ausgehend von der Lagrangefunktion und unter Annahme der *Translationsinvarianz* des physikalischen Systems bezüglich Raum und Zeit lassen sich der klassische Impuls- und Energieerhaltungssatz herleiten. Translationsinvarianz bedeutet, dass eine Parallel-Verschiebung des Koordinatensystems, mit dessen Hilfe das System beschrieben wird, im Raum bzw. in der Zeit keine Auswirkungen auf die Eigenschaften des Systems selbst hat. Diese Annahme klingt plausibel und trifft auch auf alle in der Praxis anzutreffenden Systeme zu.

---

[*] Diese Zahl wurde nicht erfunden! Die Gravitationskonstante wurde tatsächlich einmal speziell für Mürzzuschlag gemessen.

Impulserhaltungssatz:

Eine wichtige Systemeigenschaft ist der Wert der Lagrangefunktion. Wenn nun alle Orts-Koordinaten x um den konstanten infinitesimal kleinen Betrag δx verschoben werden *(hier handelt es sich nicht um eine Variation, δx steht in diesem Fall für eine extrem kleine Wegstrecke!)*, darf sich $\mathscr{L}$ nicht ändern ($\delta\mathscr{L} = 0$):

$$x \to x + \delta x\,, \quad \delta\mathscr{L} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x} \cdot \delta x = 0$$

δx ist von 0 verschieden, daher muss gelten:

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x} = 0$$

Die Ableitung der Lagrangefunktion nach dem Weg x ist aber gerade gleich der Kraft:

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x} = -\frac{\Phi(x)}{dx} = F = 0\,.$$

Die Kraft muss also immer gleich 0 sein! Dieses Resultat scheint unsinnig zu sein, ist aber korrekt, da es sich auf das System als Ganzes in abgeschlossener Form bezieht. Innerhalb des Systems können die einzelnen Teilchen sehr wohl Kräfte aufeinander ausüben, die Gesamtkraft muss jedoch gleich 0 sein!

Wenn $\delta\mathscr{L}/\delta x = 0$, folgt aus der Lagrange-Gleichung, dass auch $d/dt(\delta\mathscr{L}/\delta v) = 0$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta v} = 0 = \frac{d}{dt}(mv) = ma = 0$$

Durch Integration der beiden rechten Terme erhält man den Impulserhaltungssatz:

$$mv = const.$$

Der Impulserhaltungssatz folgt also aus der Translationsinvarianz *(manchmal auch „Homogenität" genannt; der Raum ist a priori überall gleich bzw. homogen, daher kann das Koordinatensystem an einem beliebigen Punkt angesetzt bzw. parallelverschoben werden)* des Raumes.

Energieerhaltungssatz:

Analog zum Raum muss die Lagrangefunktion bei einer Verschiebung aller Zeitkoordinaten um den infinitesimal kleinen Betrag dt unverändert bleiben:

$$t \to t + dt\,, \quad \delta\mathscr{L} = \frac{d\mathscr{L}}{dt} \cdot dt = 0$$

Natürlich soll die Lagrangefunktion auch bei Verschiebung um einen beliebig großen Raum- oder Zeitvektor konstant bleiben. Die Beschränkung auf infinitesimal kleine Längen ist für die Rechnungen jedoch notwendig und hinreichend!

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta v}\cdot\frac{dv}{dt} =$$
$$= \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x}\dot{x} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta \dot{x}}\ddot{x} \overset{\text{Lagrange-Glg.}}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta \dot{x}}\right)\cdot\dot{x} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta \dot{x}}\ddot{x} =$$
$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta \dot{x}}\cdot\dot{x}\right)}_{mv^2} = 0$$

In der ersten Zeile wurde die Zeitableitung mit der Kettenregel entwickelt (*Ableitungen nach den in $\mathscr{L}$ enthaltenen Funktionen, multipliziert mit deren t-Ableitung, zusammengezählt, ergibt die Gesamt-Ableitung von $\mathscr{L}$ nach t)*, in Zeile 2 kam die Lagrange-Gleichung zur Anwendung *(Austausch des rechten Terms der Lagrange-Gleichung durch den linken)*, in Zeile 3 wurde die Produktregel verwendet *(df(t)/dt·g(t)+f(t)·dg(t)/dt = d/dt(f(t)·g(t)))*. Der nach der Zeit abgeleitete Endterm entspricht, wie durch Einsetzen der Lagrangefunktion leicht nachgerechnet werden kann, dem Produkt mv^2. Die Masse mal Geschwindigkeit zum Quadrat muss also zeitlich konstant bleiben.

Setzt man $\mathscr{L}$ direkt in $\delta\mathscr{L}/dt$ ein, so erhält man

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{mv^2}{2} - \Phi\right)}_{\text{zeitunabh.}}.$$

Wenn also mv^2 und $(mv^2/2 - \Phi)$ zeitunabhängig sind, muss dies auch für deren Differenz gelten:

$$mv^2 - \left(\frac{mv^2}{2} - \Phi\right) = \frac{mv^2}{2} + \Phi = const.,$$

womit also schlussendlich aus der Translationsinvarianz der Zeit auch der Energieerhaltungssatz folgt! $mv^2/2$ ist die kinetische Energie (Bewegungsenergie) des Systems, das Potentialfeld die potentielle Energie.

Der Impuls- und Energieerhaltungssatz könnte auch auf wesentlich einfachere Weise direkt aus den Newton'schen Kraftgleichungen hergeleitet werden. In komplizierteren physikalischen Modellen ist der hier gewählte Weg jedoch meist der einfachste.

Translationsinvarianz und Impuls-/Energieerhaltung sind dabei nur ein Beispiel für zahlreiche andere Beziehungen zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen. Weitere Beispiele: Drehinvarianz und Drehimpulserhaltung, Lorentzinvarianz und Erhaltung des Schwerpunktes eines Systems / Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, etc. Die deutsche Mathematikerin Emmy Noether *(1882-1935)* entwickelte dazu das nach ihr benannte *Noether-Theorem*, welches vereinfacht besagt, dass es zu jeder Symmetrietransformation mit kontinuierlichen Parametern (z.B Drehwinkel bei Drehungen) eine physikalische Größe gibt, die zeitlich konstant bleibt. Den Symmetrie/Erhaltungs-Paaren liegt also ein gemeinsames Prinzip zugrunde.

EoF.